Colles de Maths - semaine 7
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Questions de cours

- Toute suite convergente est bornée
- Limite d'une somme, d'un produit
- Théorème d'encadrement
- Théorème de la limite monotone
- Théorème des suites adjacentes

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. A quelle condition sur (u_n) la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 2 Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles majorées par l et l' respectivement telles que $u_n + v_n \to l + l'$. Montrer que $u_n \to l$ et $v_n \to l'$.

Exercice 3 Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. A quelle condition sur θ la suite $(e^{in\theta})$ est-elle périodique ?
2. La suite $(\sin(n\theta))$ peut-elle tendre vers 1 ?

Exercice 4 (moyenne arithmético-géométrique)
Soit $a, b \geq 0$. On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$, ainsi que, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Exercice 5 Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > -1$. Montrer que $\dfrac{u_n}{1+u_n} \to 0 \iff u_n \to 0$.

Exercice 6 Montrer que la suite de terme générale $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$.
Indication : Considérer $u_{2n} - u_n$.

Exercice 7 Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$.

1. Etudier la monotonie de la suite définie par $v_n = \max(u_n, u_{n+1})$.
2. On suppose que (v_n) diverge. Que peut-on dire de (u_n) ?
3. On suppose que (u_n) est minorée. Montrer que (v_n) converge et que sa limite l vérifie $\forall n,\ u_{n+1} \geq 2l - v_n$. En déduire que (u_n) est convergente.

Exercice 8 (lemme de Fekete)
Soit (u_n) une suite vérifiant
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ u_{p+q} \leq u_p + u_q.$$
Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ converge vers $\inf \left\{\dfrac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.